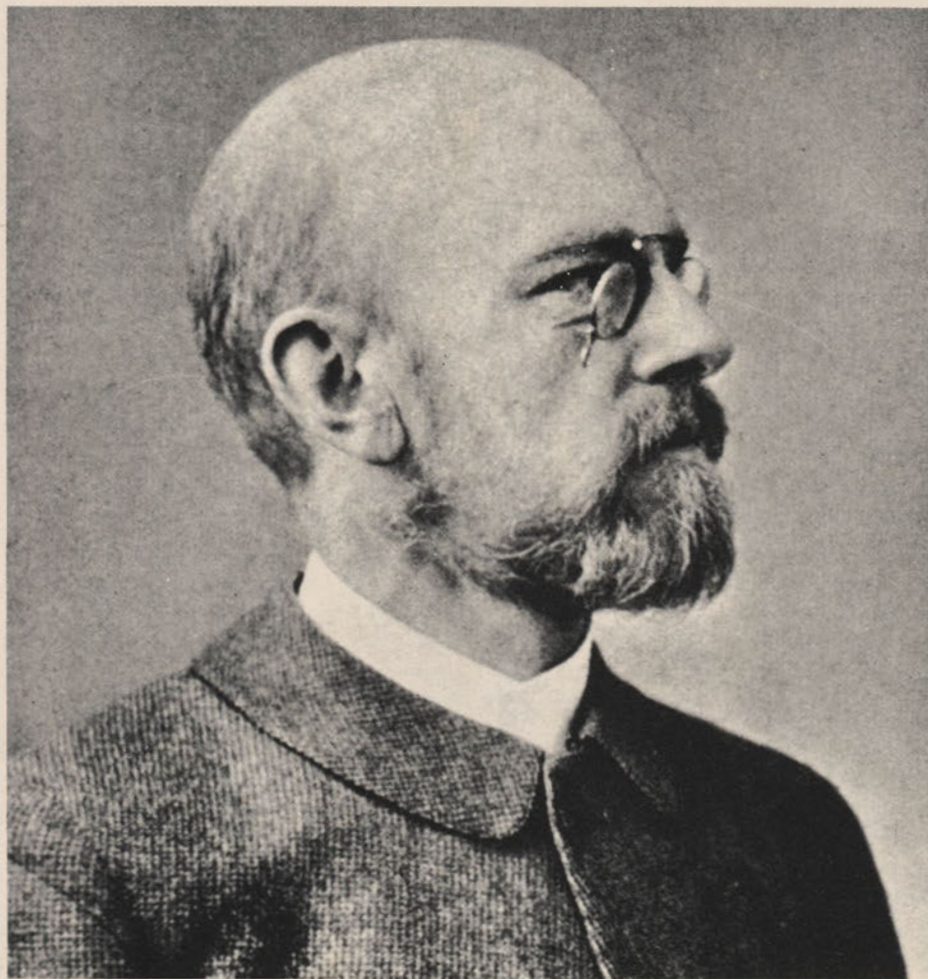
LE ORIGINI DELLA LOGICA MATEMATICA MODERNA

di Gabriele Lolli

La logica matematica si è formata come disciplina autonoma, caratterizzata dallo studio dei sistemi formali, al termine di una particolare fase di sviluppo della riflessione sui fondamenti della matematica e dell'uso del simbolismo nella logica.

Fig. 1 *David Hilbert, uno dei pochissimi matematici della nostra epoca che ha saputo ideare concetti e teoremi di fondamentale importanza nei più diversi campi dell'analisi, della geometria, dell'aritmetica e della logica.*

Verso la metà del secolo scorso alcuni studiosi cominciarono ad approfondire, con strumenti matematici, lo studio degli aspetti formali dei ragionamenti. Se usare le variabili è già « fare matematica », si può dire che questo approccio risale ai logici dell'antica Grecia, che utilizzavano lettere dell'alfabeto per rappresentare giudizi o proposizioni qualunque. Ma la ripresa della logica formale nell'Ottocento deve essere inquadrata nello sviluppo parallelo del pensiero matematico. Gli algebristi avevano iniziato a studiare operazioni più generali di quelle solite dell'addizione e della moltiplicazione tra numeri (più generali sia nel senso che si eseguono tra enti che non sono necessariamente numeri, sia che non godono esattamente delle stesse proprietà di quelle, ad esempio, della proprietà commutativa $x + y = y + x$).

Algebra della logica

In questo clima culturale in cui era maturato il concetto astratto di operazione in un sistema qualunque di enti, si costituì un complesso di studi che formarono la cosiddetta algebra della logica: se trattiamo le particelle logiche (e, non, oppure, se ecc.) come operazioni che associano il valore (« vero » o « falso ») della proposizione composta ai valori delle sue componenti più semplici riscontriamo un'analogia perfetta, dal punto di vista formale, con operazioni che vengono studiate in altri contesti matematici, quelle delle cosiddette algebre di Boole (tab. 1), oppure con quelle che si possono istituire tra cose così concrete come i circuiti elettrici, operando la costruzione di circuiti in parallelo, o in serie, e così via.

L'algebra della logica è soltanto uno dei filoni che confluiscono nella moderna logica matematica, disciplina alla cui presentazione saranno dedicati questo ed altri articoli. Riteniamo di dover accennare, sia pure in modo molto rapido, alle complesse origini storiche della logica matematica perché, non potendo scendere nei dettagli di una esposizione tecnica, dobbiamo insistere piuttosto sui temi e sui problemi che la caratterizzano e questi sono in-

scindibili dal modo in cui, così recentemente, si è venuta formando.

Tab. 1 *Assiomi delle algebre di Boole*

Un'algebra di Boole è un insieme in cui siano definite due operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ e una operazione unaria $\sim$, e che contenga due elementi distinti $\bot$ e $\top$ in modo che siano verificate le seguenti proprietà (assiomi):

Proprietà associativa
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

Proprietà commutativa
$x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$

Proprietà distributiva
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Proprietà di idempotenza
$x \wedge x = x$; $x \vee x = x$

Proprietà di assorbimento
$x \wedge (x \vee y) = x$; $x \vee (x \wedge y) = x$

Proprietà degli elementi neutri
$x \wedge \top = x$; $x \vee \bot = x$; $\bot \neq \top$

Proprietà del complemento
$x \wedge \sim x = \bot$; $x \vee \sim x = \top$

L'uso dei particolari simboli $\wedge$, $\vee$ e $\sim$ per le operazioni e di $\top$ e $\bot$ per gli elementi neutri è del tutto arbitrario. Questi sono i simboli che nella logica formale sono riservati alle particelle « e », « oppure », « non » e a « vero » e « falso ». Di uso comune sono anche i simboli $\cdot$ $+$, —, 1 e 0, oppure $\cap$, $\cup$, ', *X* e $\emptyset$ perché una tipica algebra di Boole è quella costituita da tutti i sottinsiemi di un insieme *X*, con le citate operazioni insiemistiche.
Si noti che alcuni degli assiomi possono essere interpretati come affermanti che certe proposizioni sono vere, o false, in virtù soltanto della loro forma: ad esempio una proposizione che abbia la struttura *p* oppure non-*p* è vera (ultimo assioma). Altri permettono di modificare la forma di una proposizione senza cambiarne il valore, ad esempio le proprietà distributive. Eseguendo le trasformazioni permesse da questi assiomi si possono ottenere altri risultati, ad esempio che una proposizione della forma *q* oppure (*p* oppure non-*p*) è vera.
Il nome delle algebre deriva dal matematico e logico inglese George Boole (1815-1864).

La logica matematica

L'uso del simbolismo e la consapevolezza della natura formale di certi passaggi inferenziali non sarebbero probabilmente stati così fecondi senza lo sviluppo che si ebbe anche nel campo della logica pura. Nella seconda metà del secolo scorso la ricerca logica si rivolse al problema della fondazione della matematica. Siccome i matematici erano appena riusciti a fondare sui soli numeri naturali la costruzione delle complesse nozioni dell'analisi matematica (numero reale, limite) il problema si poneva questa volta come risposta alla semplice domanda: che cosa sono i numeri? Una risposta puramente logica a questa questione dovrebbe utilizzare nozioni semplici, che possano essere legittimamente candidate a funzionare come nozioni primitive, non ulteriormente analizzabili, della logica. Dedekind usò la nozione di sistema di cose, Frege quella di concetto, Russell più tardi quella di funzione proposizionale. Una definizione proposta, anche se trasforma i numeri in qualche cosa che i matematici non riconoscono più come tali, sarà corretta se da essa si potrà ricostruire l'intera matematica in modo puramente logico, senza far intervenire nozioni non definite o princìpi di validità non generale. Per questa ricostruzione, che è il contenuto dei *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead, la logica assume come proprio modello la struttura classica delle discipline matematiche, della geometria in particolare. Si precisa un piccolo gruppo di verità logiche, non l'insieme, dai confini non ben definiti, di tutte le possibili verità logiche, e si fissano le regole di inferenza da usare. In una teoria assiomatica si precisano soltanto gli assiomi, perché si dà poi per scontato che i matematici ragionino correttamente; succedeva però che ragionando in modo apparentemente corretto a partire dalle idee primitive della logica si arrivava a certe contraddizioni; di qui la necessità sia di delimitare in modo rigoroso le verità logiche ammesse per le nozioni primitive, sia di giustificare ogni singolo passo deduttivo facendo appello a una regola precedentemente concordata. Il lavoro di produzione e controllo è notevolmente semplificato se si scrivono tutte le proposizioni in forma simbolica e quindi si procede alle deduzioni come se si manipolassero le equazioni che seguono dagli assiomi di un'algebra di Boole (tab. 1). Per l'adozione di un linguaggio simbolico si diedero diverse giustificazioni, ad esempio si cercò di definire verità logiche quelle proposizioni che erano vere soltanto in virtù della loro forma, il che imponeva l'analisi della struttura formale delle proposizioni. Ma secondo la testimonianza di Russell l'uso del simbolismo fu motivato all'inizio soprattutto dalla convinzione pratica che esso permettesse una maggior precisione e chiarezza.

Alla base di questa progettata ricostruzione logica della matematica stavano alcune assunzioni coraggiose che derivavano da una profonda analisi del pensiero, ma che non avevano ancora una giustificazione teorica. La prima è che il linguaggio della matematica possa essere fedelmente rappresentato in forma simbolica; il problema non riguarda tanto i nomi e i predicati, per cui si possono sempre introdurre dei simboli, quanto le particelle logiche, che devono necessariamente essere in numero finito, se il loro uso deve essere regolato da un numero finito di assiomi e di regole. Se fissiamo una qualunque base di particelle logiche, o connettivi, diciamo: « e », « oppure », « non », chi ci assicura che non esistano espressioni che non sono traducibili in una del nostro linguaggio? Ad esempio *p* implica *q* si può rendere con non-*p* oppure *q*, ma non c'è limite, teoricamente, alle particelle logiche che si possono immaginare. La seconda assunzione, che tutte le verità logiche si possano ottenere per questa via rigorosamente deduttiva, è ancora

più impegnativa. La terza addirittura problematica, che mai riusciremo a dedurre una contraddizione, magari diversa da quelle note delle antinomie che, apparentemente, vengono escluse. I *Principia* sono una dimostrazione pratica della legittimità di queste assunzioni, ma non un'opera della logica matematica moderna, la quale affronta invece esplicitamente e teoricamente i problemi a cui abbiamo ora accennato.

La teoria degli insiemi

Ma nel quadro che stiamo delineando manca ancora un elemento fondamentale. Il lavoro dei logici non fu senza risonanza nel campo matematico perché qui era in atto una rivoluzione che permetteva l'assorbimento del loro lavoro nell'ambito della matematica. I matematici avevano incominciato a ragionare in termini di insiemi, ad accorgersi che l'oggetto del loro discorso era sempre costituito da insiemi, o che un discorso di questo genere si poteva ridurre a insiemi di punti, a funzioni che non sono altro che insiemi di coppie, a numeri reali che nella definizione di Dedekind o Cantor sono insiemi di numeri naturali e così via. A partire dalla necessità di organizzare in una serie di risultati le conoscenze sugli insiemi di numeri reali, Cantor aveva iniziato uno studio astratto degli insiemi, prima insiemi di punti, poi insiemi di oggetti qualunque; la teoria degli insiemi si imponeva sia per il suo interesse intrinseco e per la sua utilità per l'analisi, sia perché era sempre più chiaro che tutte le nozioni matematiche si potevano definire per mezzo di quella di insieme. Era stato Dedekind a iniziare questo corso, con la sua definizione dei numeri naturali per mezzo della nozione di sistema. Questa era inizialmente una nozione primitiva della logica, ma aveva lo stesso significato di quella matematica di insieme o di classe. Anche le altre nozioni primitive dei logici, quelle di concetto o di funzione proposizionale, erano interscambiabili con quella di insieme: al concetto di rosso si può sostituire l'insieme, o classe, o sistema di tutte le cose rosse, la cosiddetta estensione del concetto, o almeno si è visto che si poteva nei discorsi che i logici facevano sulla fondazione della matematica.

La teoria degli insiemi ebbe le sue difficoltà ad imporsi, a causa delle confusioni che nascevano dal trattare liberamente come oggetti del pensiero gli insiemi infiniti. Anche i matematici, anzi loro per primi, si scontrarono con le antinomie, e dopo un periodo di incertezze che costituisce uno dei momenti più interessanti della storia del pensiero, all'inizio del secolo, trovarono una soluzione: nel 1908 Zermelo mise in forma assiomatica la teoria degli insiemi, codificando una serie di princìpi da cui apparentemente le antinomie conosciute non potevano dedursi: soluzione del tutto analoga a quella proposta dai logici, a meno della codificazione rigorosa della tecnica deduttiva. Per i matematici il difetto, se c'è, sta negli assiomi, e non nel ragionamento. Gli assiomi della teoria degli insiemi enunciano dei princìpi di costruzione degli insiemi diversi dalle proprietà delle nozioni primitive dei logici, perché in realtà gli insiemi dei matematici sono qualcosa di diverso dalle estensioni dei concetti a cui abbiamo accennato prima, ma su questo punto non possiamo fermarci. Di fatto, poiché i matematici hanno usato la nozione di insieme per definire tutti gli altri enti matematici, la teoria degli insiemi è venuta ad assumere, un po' ambiguamente, il ruolo che dovevano avere i primi sistemi logici. E rimanevano aperti i problemi fondamentali, primo fra tutti quello della non contraddittorietà della teoria.

Rappresentazione in forma simbolica del linguaggio e dei ragionamenti

A questo punto, con l'organizzazione logica della matematica messa nella forma di una teoria assiomatico-deduttiva e con la rappresentazione simbolica dello sviluppo deduttivo della stessa, si apre una nuova fase. È David Hilbert che, in una serie di proposte che iniziano nel 1904, riesce a cogliere teoricamente le nuove possibilità aperte dalla rappresentazione simbolica dei ragionamenti. Di fronte alle antinomie non è sufficiente porre delle restrizioni *ad hoc* ai princìpi e procedere poi deduttivamente con cautela, ma bisogna sottoporre ad un'analisi rigorosa il processo stesso del pensiero. Questo è possibile proprio in seguito alla scoperta, illustrata dai *Principia,* che il linguaggio e il ragionamento possono essere rappresentati in forma simbolica. Qualunque cosa siano i simboli, sono cose concrete, in numero finito, che noi manipoliamo in modo elementare. Se si vuole proprio precisare che cosa sono i simboli, possiamo raccogliere un suggerimento di Leibniz e dire che sono alcuni numeri, tra cui istituiamo una serie di operazioni elementari. Ma se diamo per scontato di sapere ciò che sono, vediamo cosa occorre per mettere in piedi un sistema deduttivo formale. Occorre saper riconoscere se una cosa, un segno, è un simbolo o no, e se due simboli sono uguali o diversi. Occorre saper scrivere i simboli uno di seguito all'altro in modo da formare dei complessi di simboli che sono le parole, e riconoscere se un complesso qualunque di simboli è una parola del linguaggio o no. Occorre essere in grado di sostituire in una parola un simbolo con un altro o con un'altra parola, e così via (tab. 2). Sono tutte operazioni che anche un bambino saprebbe eseguire, e che sono in effetti della stessa natura di quelle che affrontiamo quando impariamo a contare. Le capacità occorrenti per queste manipolazioni possono essere considerate affidabili, sono una parte sicura delle nostre capacità logiche che giocano esplicitamente in quella parte della matematica che si chiama combinatoria. Se noi possiamo rappresentare in forma deduttiva simbolica la logica, possiamo sottoporre a uno studio matematico la logica, e invero con tecniche matematiche del tutto sicure. Che le capacità combinatorie siano poi di natura matematica o logica diventa difficile da decidere, e anche trascurabile. Posto allora in forma simbolica un sistema di logica, possibilmente esauriente dal punto di vista pratico (tab. 3), possiamo affrontare le questioni prima rimaste in sospeso, della sua adeguatezza dal punto di vista espressivo, della sua adeguatezza dal punto di vista deduttivo (se vi si possano dedurre tutte le espressioni che riteniamo verità logiche), della sua non contraddittorietà e così via. Lo stesso si può fare per teorie che a questa

Tab. 2 *Un linguaggio formale*

Descriviamo un esempio di linguaggio formale. È dato innanzitutto un

ALFABETO: una lista finita di simboli

$$v, ', P, f, (,), \sim, \rightarrow, \forall$$

Tra tutte le successioni finite di simboli si individuano ora

VARIABILI:

i) v è una variabile
ii) se x è una variabile, x' è una variabile
iii) nessuna altra successione è una variabile

TERMINI:

i) ogni variabile è un termine
ii) se x e y sono termini, $f(xy)$ è un termine
iii) nessuna altra successione è un termine

FORMULE:

i) se x e y sono termini, $P(xy)$ è una formula (atomica)
ii) se A e B sono formule e x è una variabile allora $\sim A$, $(A \rightarrow B)$ e $\forall x(A)$ sono formule
iii) nessuna altra successione è una formula

Abbiamo scelto un linguaggio particolare, con un solo simbolo predicativo binario, P, e un solo simbolo funzionale binario, f, ma potrebbero essercene diversi, e anche una lista infinita; se si lascia cadere la richiesta di un numero finito di simboli, anche le variabili possono essere date esplicitamente in una lista infinita v_0, v_1,... È essenziale però poter disporre di una lista infinita di variabili perché valgano i risultati classici accennati nel testo.
I simboli $\sim$ e $\rightarrow$ sono i connettivi proposizionali che si leggono rispettivamente « non » e « implica »; la scelta di questi due, ad esclusione di altri, è arbitraria, ma legittimata dal fatto che con questi si possono definire tutti gli altri; ad esempio si pone $(A \vee B)$ per $(\sim A \rightarrow B)$ e $(A \wedge B)$ per $\sim(\sim A \vee \sim B)$.
Il simbolo $\forall$ si chiama quantificatore universale e $\forall x(A)$ si legge « per ogni x, A ». Se in A compare x, tutte le occorrenze di x si dicono legate dal quatificatore iniziale. Si può introdurre per definizione il quantificatore esistenziale $\exists x(A)$, che si legge « esiste un x tale che A », ponendo $\exists x(A)$ per $\sim \forall x(\sim A)$.
Con $A(x/y)$ indichiamo il risultato della sostituzione del termine y in tutte le occorrenze in A di x, variabile, che non siano legate da qualche quantificatore.

base logica aggiungano assiomi matematici specifici, come quelli dell'aritmetica o della teoria degli insiemi. Ma si tenga presente che a queste questioni bisogna rispondere in base a un'analisi combinatoria delle successioni di simboli. Consideriamo il caso delle deduzioni. Ammesso di aver già isolato tra tutte le successioni finite di simboli quelle che sono formule del nostro linguaggio, diciamo che una successione di formule è una dimostrazione se ogni formula che vi compare o è un assioma, logico o proprio della teoria, o si ottiene da formule precedenti per mezzo delle regole logiche. Data una successione di formule, si può verificare in modo effettivo se essa è una dimostrazione o no. Per dimostrare che una teoria è non contraddittoria possiamo cercare di dimostrare che nessuna dimostrazione può terminare con una contraddizione, $(A \wedge \sim A)$. Ora le dimostrazioni sono in numero infinito, ma noi possiamo fare ragionamenti combinatori anche sulla totalità delle dimostrazioni, esattamente come possiamo stabilire delle proprietà valide per tutti i numeri naturali, anche se non è possibile esibirli concretamente tutti.

Tecnica della induzione

La tecnica fondamentale è quella della induzione. Le dimostrazioni sono generate da un procedimento uniforme, applicazione di un numero finito di regole a uno *stock* inziale di oggetti, che sono gli assiomi, esattamente come i numeri sono generati dalla operazione di successore applicata all'oggetto iniziale zero. Allora, sempre riferendoci al problema della non contraddittorietà, possiamo cominciare a stabilire che nessun assioma è una contraddizione, e poi cercare di dimostrare che se una dimostrazione non termina con una contraddizione, allora allungandola con una ulteriore applicazione di una regola ne otteniamo una che ancora non può terminare con una contraddizione. In questo particolare problema il passo induttivo non è immediato (uno potrebbe arrivare a dimostrare $A \rightarrow (B \wedge \sim B)$, che non è una contraddizione, con un A molto complicato e apparentemente non contraddittorio, poi dimostrare A e avere una contraddizione con la regola del *modus ponens*, la prima regola della tabella 3; studi molto importanti sono stati dedicati alla elaborazione di sistemi logici equivalenti ma privi di questa regola, ma a noi premeva ora segnalare che il ragionamento per induzione è la tecnica più naturale nello studio dei sistemi formali, che non sono altro che una totalità di oggetti concreti generati in modo uniforme, come il sistema dei numeri naturali. La dimostrazione, per questa via, della non contraddittorietà dei sistemi matematici classici, l'aritmetica o la teoria degli insiemi, è stato l'obiettivo del cosiddetto *programma di Hilbert*.
La dimostrazione della impossibilità di raggiungere tale obiettivo con gli strumenti combinatori è stato uno dei risultati più sensazionali della storia del pensiero umano, e ad essa dedicheremo una parte seguente della esposizione. Ma intanto si accumulavano i primi risultati che hanno dato volto alla logica matematica. Si consideri il problema dell'adeguatezza espressiva dei linguaggi formali; i connettivi logici si possono identificare con funzioni in un'algebra di Boole, ad esempio l'algebra formata dai soli due elementi $\top$ e $\bot$, che si possono leggere « vero » e « falso ». È un teorema della teoria delle algebre di Boole che ogni funzione, con un numero qualunque di variabili, si può scrivere utilizzando solo le operazioni fondamentali descritte dagli assiomi, e questo risultato permette di stabilire che il sistema di connettivi $\wedge$, $\vee$, $\sim$ forma una base adeguata per il linguaggio. Il risultato si può anche stabilire combinatoriamente e si può dimostrare, in via molto astratta e generale, quali proprietà deve avere un sistema finito di connettivi, perché con esso si possano rappresentare tutti gli altri.
È stata dimostrata la non contraddittorietà del calcolo dei predicati (tab.

Tab. 3 *Calcolo dei predicati*

Dato un linguaggio formale L, come in tabella 2, il sistema assiomatico-deduttivo di logica che si chiama Calcolo dei Predicati (del primo ordine) per il linguaggio L è così costruito:

ASSIOMI:

$((A \rightarrow (B \rightarrow A))$

$((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$((\sim B \rightarrow \sim A) \rightarrow ((\sim B \rightarrow A) \rightarrow B))$

$(\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x(B))$ — se x non compare in A, oppure compare solo legata

$(\forall x(A) \rightarrow A(x/t))$ — dove t è un termine di L, purché non contenga occorrenze della x che risultano legate in $A(x/t)$

Si intende che le lettere A, B e C rappresentano formule qualunque di L, con le restrizioni esplicitamente indicate.

REGOLE:

i) Da A e $(A \rightarrow B)$ segue B

ii) Da A segue $\forall x(A)$

Scriviamo $\vdash A$ se A è dimostrabile, cioè è l'ultima formula di una dimostrazione, ovvero di una successione di formule in cui ognuna è un assioma o si ottiene da precedenti per mezzo delle regole.

ESEMPIO:

$\vdash (A \rightarrow A)$

Dimostrazione:

(1) $((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$ — primo assioma con $(A \rightarrow A)$ al posto di B

(2) $((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ — secondo assioma con $(A \rightarrow A)$ al posto di B e A al posto di C

(3) $((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ — da (1) e (2) per la prima regola

(4) $(A \rightarrow (A \rightarrow A))$ — primo assioma

(5) $(A \rightarrow A)$ — da (3) e (4) per la prima regola.

Si noti che $(A \rightarrow A)$, ovvero $\sim A \vee A$, è il principio del terzo escluso.
Se il linguaggio L contiene un simbolo predicativo binario, che scriviamo, nelle formule atomiche, $x = y$, possiamo aggiungere gli assiomi dell'identità, ottenendo il calcolo dei predicati con identità

$$\forall x(x = x)$$

$$\forall x(\forall y(x = y \rightarrow (A(x,x) \rightarrow A(x,y))))$$

dove $A(x,x)$ è una formula che può contenere occorrenze della x e $A(x,y)$ si ottiene sostituendone alcune con y.

Una teoria formale T si ottiene aggiungendo alcune formule di L agli assiomi del calcolo; si scrive $T \vdash A$ se A è dimostrabile in T, cioè è l'ultima formula di una successione in cui ogni formula o è un assioma del calcolo logico, o un assioma proprio della teoria, o si ottiene da precedenti per mezzo delle regole logiche.

3), cioè di un sistema di logica pura, e anche la sua completezza, vale a dire che si possono dimostrare tutte le formule che sono vere. Per illustrare questo risultato occorre dare prima una definizione di verità o validità di una formula, e questo argomento è un arricchimento rispetto al programma dello studio combinatorio dei simboli. Un arricchimento che i logici hanno però immediatamente considerato, perché è ovvio che di una teoria matematica non interessa solo il suo aspetto formale, ma anche la sua interpretazione come discorso su oggetti matematici concreti. Poiché a questo argomento è riservata la seconda parte della esposizione, consideriamo qui soltanto il frammento della logica costituito dal calcolo proposizionale, cioè il sistema che consiste dei primi tre assiomi e della prima delle regole della tabella 3. È facile verificare che gli assiomi hanno la seguente proprietà: qualunque valore si dia alle formule componenti A, B, C, « vero » o « falso », il valore dell'assioma è « vero », dove questo computo di valori va al solito pensato nell'algebra di Boole costituita dai soli due elementi neutri, in base alle regole stabilite dagli assiomi delle algebre di Boole. Si dice anche che gli assiomi sono tautologie. È altrettanto facile stabilire il passo induttivo, che se A e $(A \rightarrow B)$ sono tautologie anche B lo è. Di qui segue la non contraddittorietà del calcolo, perché non si potrà mai dimostrare una contraddizione, diciamo $(A \wedge \sim A)$, che non è una tautologia. Il teorema di completezza afferma viceversa che se A è una tautologia, allora A è dimostrabile. Si noti che l'essere una tautologia è ancora una proprietà verificabile combinatoriamente, per cui la definizione, che è implicita, di verità come tautologia, rimane nell'ambito combinatorio. Questo non è più possibile nel caso in cui l'analisi di una proposizione si spinga fino alla individuazione dei predicati e dei quantificatori che la compongono, oltre che delle particelle proposizionali.

Programma di Hilbert

Non possiamo dare qui la dimostrazione del teorema di completezza, sia pure solo per il calcolo proposizionale, che è meno immediata della dimostrazione della non contraddittorietà. Sfortunatamente in tutte le esposizioni divulgative della logica matematica la parte che può essere illustrata in modo dettagliato è quella combinatoria più banale, e questo può contribuire alla idea che la logica matematica si riduca a eseguire giochini con simboli. Ora noi abbiamo messo al centro della formazione della logica proprio il programma di Hilbert, perché è attraverso di esso che i sistemi formali sono diventati l'oggetto della logica, ma non si deve pensare che in essa non sia presente altra forma di pensiero che quella combinatoria, così come l'algebra non si riduce ad applicare la formula per la risoluzione delle equazioni di secondo grado. L'esempio che abbiamo fatto può servire ad illustrare la situazione; la dimostrazione che tutti i teoremi del calcolo proposizionale sono tautologie è banale, ma l'aver individuato la proprietà di essere una tautologia come quella che poteva servire allo scopo lo è un po' meno, ed ha richiesto una certa dose di pensiero non combinatorio. È stata elaborata in seguito a complicate discussioni tra i logici su cosa si dovesse intendere per verità logica. È tipico, ed è la parte importante, del lavoro

dei logici, riuscire ad elaborare in risultati e tecniche rigorose dei suggerimenti che inizialmente vengono dibattutti in modo impreciso. Vogliamo illustrare con un ultimo esempio questa affermazione. Si dice che una teoria T_1 è non contraddittoria relativamente a T_2 se la non contraddittorietà di T_2 implica quella di T_1, indipendentemente dal fatto che T_2 sia, o che noi sappiamo che sia, non contraddittoria. Questo concetto ritorna spesso nella storia della matematica: con la geometria analitica la non contraddittorietà della geometria fu ridotta a quella dei numeri reali; nel secolo scorso fu dimostrato che aggiungendo la negazione del postulato delle parallele ai restanti assiomi della geometria si ottiene una teoria non contraddittoria, se quella di partenza lo è. Nella teoria degli insiemi ci sono dei princìpi, come l'assioma della scelta, la cui legittimità venne vivacemente discussa nel periodo di formazione della teoria. La decisione se ammetterli o meno è stata lasciata, o almeno lo è stata in questo caso, alla pratica ma, soprattutto dopo che si vide l'impossibilità di dimostrare la non contraddittorietà della teoria degli insiemi secondo il programma di Hilbert, divenne importante stabilire almeno la non contraddittorietà di questo assioma relativamente agli altri, universalmente accettati senza remore. Nel caso della geometria si era proceduto così: si era dimostrato che se i restanti assiomi avevano un modello, una realizzazione, allora se ne poteva costruire uno in cui oltre ad essi anche la negazione dell'assioma delle parallele era valido.

Concetto di modello e approccio sintattico

Questo concetto di modello, che fu precisato come vedremo dalla logica matematica, è del tutto innaturale nella considerazione della teoria degli insiemi; infatti, anche dal punto di vista intuitivo, un modello è una particolare struttura matematica e quindi un insieme, cioè uno degli oggetti presenti nell'universo della teoria degli insiemi. Un modello per questa teoria dovrebbe essere la totalità di tutte le possibili strutture, e quindi non esso stesso una struttura. Dovrebbe appunto essere l'universo, che non può essere oggetto di manipolazioni matematiche. Per questa ragione, che potrebbe essere ulteriormente elaborata, l'approccio più naturale ai problemi di non contraddittorietà della teoria degli insiemi è quello che lavora sulle formule e sulle dimostrazioni della teoria, cioè, come si dice, l'approccio sintattico. D'altra parte per dimostrare che una certa formula non è contraddittoria, o che non è dimostrabile, occorre sempre, sia pure indirettamente, fare riferimento a delle realizzazioni della teoria in cui certe proposizioni valgono o non valgono, quindi a diversi universi della teoria degli insiemi. La cosa riesce, sintatticamente, in questo modo. Quando una formula è dimostrabile nella teoria, possiamo pensare che ciò significhi che è vera nell'universo intuitivo. Supponiamo ora di avere una formula $L(x)$ con una variabile, che descrive una condizione che alcuni insiemi possono soddisfare, ad esempio « x è finito ». La formula $L(x)$ deve essere scritta nel linguaggio formale stabilito all'inizio, e si dice che un insieme la soddisfa se tale insieme è definibile esplicitamente da un termine t, e si può dimostrare $L(x/t)$ nella teoria, che indichiamo con T, cioè $T \vdash L(x/t)$. Per ogni formula A, indichiamo con $A^{(L)}$ quella che si chiama la relativizzata di A ad L, e che si ottiene sostituendo ogni parte di A che comincia con un quantificatore, ad esempio $\forall x(B)$ con $\forall x(L(x) \rightarrow B)$, partendo dall'interno di A. È facile convincersi che dimostrare in T la relativizzata $A^{(L)}$ si può interpretare come l'affermazione che A vale, non nell'universo, ma nella collezione di insiemi, non necessariamente un insieme, che soddisfano L. Se ora indichiamo con S l'assioma di scelta, che supponiamo non incluso in T, e se possiamo dimostrare che $T \vdash A^{(L)}$ per ogni assioma A di T, e inoltre che $T \vdash S^{(L)}$, allora possiamo dire che la classe degli insiemi che soddisfano L è un « modello » di T, e uno in cui vale S; ma senza comprometterci in questo linguaggio figurato, possiamo certo concludere che se T è non contraddittoria, lo rimane anche con l'aggiunta di S. Infatti, supponiamo di poter derivare una contraddizione da $T + S$, $T + S \vdash (B \wedge \sim B)$; possiamo senz'altro ammettere che B sia una semplice formula senza quantificatori, per cui $B^{(L)} = B$. Esiste allora una dimostrazione di $(B \wedge \sim B)$ in cui come assiomi entrano un numero finito di assiomi di T, oltre eventualmente ad S. Allora la formula $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge S) \rightarrow (B \wedge \sim B))$ è dimostrabile nel calcolo dei predicati, $\vdash ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge S) \rightarrow (B \wedge \sim B))$. Questa conclusione discende dal cosiddetto teorema di deduzione, che è uno dei primi risultati fondamentali dello studio combinatorio dei sistemi formali. Sempre combinatoriamente si può vedere che allora $\vdash (A_1^{(L)} \wedge \ldots \wedge A_n^{(L)} \wedge S^{(L)} \rightarrow (B \wedge \sim B)$. Siccome infine l'antecedente di questa implicazione è dimostrabile in T, anche $(B \wedge \sim B)$ sarebbe dimostrabile in T, e quindi T sarebbe contraddittoria. In questa dimostrazione, la parte combinatoria è tutta quella che abbiamo riassunto, ma la parte difficile del risultato sta nel trovare una formula $L(x)$ che non sia banale, per cui cioè non si possa dimostrare $\forall x(L(x))$, altrimenti questa descriverebbe l'intero universo, e per cui si possa dimostrare in T sia $S^{(L)}$ sia tutti gli assiomi relativizzati. Si vede subito ad esempio che se L è la condizione di essere un insieme finito le cose non vanno bene (l'assioma dell'infinito della teoria non vale se relativizzato agli insiemi finiti). L'aver trovato una condizione che funzionasse è stato merito di Kurt Gödel che, rielaborando discussioni dell'inizio del secolo sulla opportunità di limitarsi a considerare soltanto gli insiemi definibili e sfruttando la possibilità di sviluppare all'interno della teoria degli insiemi la trattazione dei sistemi formali e del concetto di definibilità, è riuscito a trovare una formula siffatta, che intuitivamente descrive gli insiemi definibili in un certo modo.

Con teoremi come questo citato, la logica matematica ha cominciato a fornire alla matematica una serie di risultati utili, di cui vedremo altri esempi nel seguito.

BIBLIOGRAFIA

Casari E., *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, Milano 1970.

Mendelson E., *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, Torino 1973.